165. 凸集合の或種の拡張について I

（星型集合）

田村 孝行　（1949. 4. 14）

§1. 記号の規約

Ω を Euclid 2次元空間とし Ω における点を x, y, a, …… 等で、点集合を X, Y, A, …… 等で表し. M' は M の餘集合, $\overline{M}$ は M の closure, M^i は M の内成分（すべての内点の集合） M^e は外成分（すべての外点の集合）, M^* は M の境界, ϕ は 空集合を表す. 特に注意すべき記号として

(イ) 線分, 半直線 等の点集合に関する記号

$[x, y]$ は x, y を含む閉線分. 特に $[x, x]$ は x 一点を表す. 以下 $x \neq y$ とする.

(x,y) は $[x,y]$ から x 及び y を除く部分

$[x,y)$ は $[x,y]$ から y だけを除く． $(x,y]$ も同様

$\overline{[x,y]}$ は x,y を含む直線

$[\overrightarrow{x,y}]$ は x を起点とし y 方向への半直線． $[\overleftarrow{x,y}]$ も同様．

$(x,\vec{y}]$ は $[\overrightarrow{x,y}]-[x,y)$ 　　 $[\overleftarrow{x},y)$ も同様．

$(x,\vec{y})$ は $[\overrightarrow{x,y}]-(x,y]$ 　　 $(\overleftarrow{x},y)$ も同様．

$[\overleftarrow{x},\overrightarrow{y}]$ は $[\overline{x,y}]-(x,y)$ 　　 $(\overleftarrow{x},\overrightarrow{y})=[\overline{x,y}]-[x,y]$

半直線の別の表し方として

x を通る一つの半直線を原線とし，これとなす偏角 θ（正負あり）を以て x を通る任意の半直線を表し $H(\theta;x)$ とかく．勿論 $H(0;x)$ は原線をさす．但し $H(\theta;x)$ は x をも含むものとし，x を含まないときは $H(\theta;\check{x})$ とする．又特に偏角を示す必要がないときは，$H(x)$，$H(\check{x})$ とする．

(ロ) $\mathfrak{Z}(M)$ について

M を定集合，X を任意の集合とするとき $X\cap M$（但し $\neq\varphi$ とす）が連結 (*connected*) である事を X が M に関して連結であるといい，$X\in\mathfrak{Z}(M)$ とかく．例として $X=[a,b]$，$H(\theta;x)$ の場合を挙げておく．

example 1.

$a\neq b$ であるとき

$a,b\in M$ のとき $\begin{cases}[a,b]\in\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows[a,b]\subset M\\ [a,b]\overline{\in}\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows[a,b]\not\subset M\end{cases}$

$a\in M,\ b\in M'$ 　 $\begin{cases}[a,b]\in\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows\forall y\in[a,b]\cap M,\ [x,y]\in\mathfrak{Z}(M)\\ [a,b]\overline{\in}\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows\exists y\in[a,b]\cap M,\ [x,y]\overline{\in}\mathfrak{Z}(M)\end{cases}$

$a=b$ のときも $a\in M$ であれば $[a,a]\in\mathfrak{Z}(M)$ と規約する．唯一点から成る集合も連結であるとする．従って $a\neq b$ 且つ $[a,b]\cap M$ が唯一点のときも $[a,b]\in\mathfrak{Z}(M)$

example 2.

$H(\theta;x)\in\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows\forall y\in H(\theta;x),\quad [x,y]\in\mathfrak{Z}(M)$

$H(\theta;x)\overline{\in}\mathfrak{Z}(M)\rightleftarrows\exists y\in H(\theta;x),\quad [x,y]\overline{\in}\mathfrak{Z}(M)$

（$\forall$，$\exists$ 等の論理記号については説明の必要はないと思う．）

(ハ) $\mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ について

$\exists x, y \in X \cap M$ なるxとyが $X \cap M$に含まれる連続曲線（屈折線でもよい）で結ばれるとき $X \in \mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ と記する。

(ニ) 論理記号についての一注意

次の二通りの記号は非常に意味が違います。

$\exists y : \forall x \sim$

すべてのxについて〜であるようなyが存在する。

従ってyはxに independent

$\forall x ; \exists y : \sim$

xを任意にとると、それに応じて〜であるようなyが存在する。

従ってyはxに depend する。

其他の記号の規約については必要に応じその都度説明する。

§2 本文の目的

convexの定義は "$\forall x, y \in M,\ [x, y] \subset M$" であるが、前半の$\forall$の一つを$\exists$で代えること、又は後半の$[x, y]$を "$[x.y]$ or $[\overleftarrow{x}.\overrightarrow{y}]$" で代えることによって二三の拡張が出来る。即ち

(1) $\exists x \in M : \forall y \in M, \quad [x, y] \subset M$

(2) $\forall x \in M, \forall y \in M. \quad [x, y] \subset M$ or $[\overleftarrow{x}.\overrightarrow{y}] \subset M$

(3) $\exists x \in M : \forall y \in M, \quad [x, y] \subset M$ or $[\overleftarrow{x}, \overrightarrow{y}] \subset M$

(1)の場合Mを星型集合 (*star set*)，(2)を準凸集合 (*semi-convex set*)

(3)を準星 (*semi-star set*) ということにする。

然しもっと広く拡張して次の如く定義する。

(4) $\exists x \in \Omega : \forall y \in M, [x, y] \in \mathfrak{Z}(M)$ であるとき Mを扇型集合 (*scalloped set*) と定義すると，convex は勿論，(1)(2)をも含み、更に(3)についてはその鉄集合がこれになる事が言える。これらの集合の性質について調べた結果を報告したいと思う。尚この研究は出来るだけ初等的な方法を用いた事を注意しておく。

§3 一般的な星型集合

定義　点集合Mがあって，$\exists a \in M : \forall x \in M, [a ; x] < M$ であるとき，Mを星型集合 (*star set*) といい，aを星型集合の中心という。

このような すべての $a\ (\in M)$ の集合をMの中心集合 (*centric set*) といい、 $C(M)$ で表す。

上の星型集合の定義は 次の定義と同等である。

$\exists a \in M : \forall H(a) \in \mathfrak{Z}(M)$

尚 明かな事であるが、Mが *Convex* $\rightleftarrows \left[\begin{array}{l} \text{Mが星型であって} \\ C(M)=M \end{array}\right]$

定理 1. 星型集合は連結である。

証. $\forall x, y \in M$ は $a \in C(M)$ を通る $[x, a] \cup [a, y]\ (\subset M)$ で結ばれる。

定理 2. Mを星型集合とするとき, $\forall x \in M'$; $\exists H(x) \subset M'$

証. もし $\exists x \in M' : \forall H(x) \not\subset M'$ とする。今 $a \in C(M)$ なる a を一つとり、$[\vec{a}, x] - (a, x) = H_0(x)$ とすると、$H_0(x) \not\subset M'$ だから $\exists y \in H_0(x) \cap M$. 従って $[a, y]$ が $x \in M'$ を含むことになり $a \in C(M)$ であることに矛盾する。

系 C を *Jordan* 閉曲線、C の囲む有限な領域を $\mathfrak{D}(C)$ とする。Mを星型とするとき、$C \subset M$ であれば $\mathfrak{D}(C) \subset M$

証 定理2より明らか。

次に $C(M)$ の重要な性質として、

定理 3. Mを星型集合とするとき、中心集合 $C(M)$ は *convex* である。

証 一点のみから成る集合も *convex set* と見なす事にすると、$C(M)$ が一点だけの時は 本定理はすでに成立つから、$C(M)$ は一点以上あるものとする。$\forall a, b\ (\neq) \in C(M)$, $\forall c \in (a, b) \rightarrow c \in C(M)$ である事を証明すればよい その為に $\forall a, b\ (\neq) \in C(M)$, $\exists c \in (a, b) : c \notin C(M)$ と仮定すると, $C(M)$ の定義から明に $\exists x \in M : (c, x) \not\subset M$ 従って $\exists y \in M' \cap (c, x)$. 然るに $[a, x]$, $[b, x]$ $[a, b]$ 何れも $\subset M$ であるから, a, b, x を結ぶ閉屈折線の内部に $y \in M'$ を含む事になり 定理2, 系に矛盾。

尚簡単な事であるが 次の定理も書添えておく。

$\exists\theta : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ H(\theta, x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$

且 $\exists\varphi(\neq\theta) : 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ H(\varphi; x) \in \mathfrak{Z}(M)$

証： 前半は明かであるが、問題は むしろ後半である。仮りに $\exists x \in M - C(M)$: $\forall\theta : 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ H(\theta; x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ としよう。今 $\forall a \in C(M)$ をとると，$[\overrightarrow{a, x}] = [a, x] \cup H(\theta_0; x)$（但し $[\overrightarrow{a, x}] - [a, x]$ を $H(\theta_0; x)$ とおく） $H(\theta_0; x) \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ なる故 $[\overrightarrow{a, x}] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ となり $a \in C(M)$ に反する。これで條件の必要な事が証せられたが，十分な事は明かである。

さて 星型Mに有界という條件を加えてみよう。

定理 5. Mが有界な 星型集合であるとき

$a(\in M)$ が $a \in C(M)$ である爲の必要十分な條件は

$\forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$ である。

証　必要なることの証明

若し $a \in C(M)$ に対し，$\exists x \in M';\ [a, x] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ とする。

§1.(ロ). ex.1 により $\exists y \in [a, x] \cap M : [a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$

これは $a \in C(M)$ に矛盾する。

十分なることの証明：

$\forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$ なる a が若し $a \overline{\in} C(M)$ とする。

$\exists y \in M : [a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ （此の場合 $[a, y] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ は $[a, y] \not\subset M$ と同じである）

だから，$\exists z \in M' \cap [a, y]$

一方 M の有界性により $\exists u \in M' \cap (a, \overrightarrow{y})$ 従って $[a, u] \overline{\in} \mathfrak{Z}(M)$ となり a の條件に矛盾する。

注意 ： 定理5 では有界という仮定が重要である。有界でない星集合では必ずしも成立しない。

定理 6. 有界集合 M が星型である爲の必要十分な條件は

$\exists a \in M : \forall x \in M',\ [a, x] \in \mathfrak{Z}(M)$

注意 ： これも有界でないと，必ずしも成立しない。例えば，N を有界凸集合とするとき，$\Omega - N$ は 明かに星型でないが，すべての 点が上の條件を満足してゐる。

星型集合に領域（domain）という條件を与える。尚この追加條件は open set という事だけを与えるのと同じである。それは定理1から すでに connected である事が保証されているから。星型開集合を星型領域 又は単に 星領域（star domain）ということにする。

定理 7. 星型領域は simply connected である。

証　定理2. 系より明かである。

定理 8. Mを星型領域とすれば $M-C(M)$ は open set

証　$\forall x \in M-C(M)$; $\exists y \in M$: $[x,y] \not\subset M$ 従って

$\exists p \in [x,y] \cap M'$, 又 Mが domain により

$\exists \varepsilon>0$: $U(y;\varepsilon) \subset M$　（$U(y;\varepsilon)$ は y の ε-近傍を表す）

x と p との距離を $dis(x,p)$ とすることにして

$0 < \forall\delta < \varepsilon \dfrac{dis(x,p)}{dis(p,y)}$,　$\forall z \in U(x;\delta)$, $(z,\vec{p}) \cap U(y;\varepsilon) \neq \phi$

又 $\forall u \in (z,\vec{p}) \cap U(y;\varepsilon)$, $[z,u] \not\subset M$　（pを含むから）

$z \in M-C(M)$　　$\therefore U(x;\delta) \subset M-C(M)$

次に最も興味ある場合の一つとして 有界星領域 について調べる。

定理9. Mを有界星領域とするとき、

$a(\in M)$ が $a \in C(M)$ である為の必要十分な條件は

$\forall r \in M^*$, $[a,r] \in \mathfrak{Z}(M^*)$ なることである。

証　必要なることの証

$a \in C(M)$ に対し $\exists r \in M^*$: $[a,r] \bar{\in} \mathfrak{Z}(M^*)$ と仮定しよう。

然るとき $\exists t \in M^* \wedge (a,r)$ 且. $\exists x \bar{\in} M^*$: $x \in (t,r)$.

従って $x \in M$ 又は $x \in M^\circ$

(i) $x \in M$ の場合

$\exists \varepsilon>0$: $U(x;\varepsilon) \subset M$. 一方 $t \in M^*$ により $0 < \forall\delta < \varepsilon \dfrac{dis(a,t)}{dis(a,x)}$.

$\exists y \in M' \cap U(t;\delta)$,　　さて $\forall z \in U(x;\varepsilon) \cap (a,\vec{y})$ $(\neq\phi)$

なる z をとると. $y \in [a,z]$　　$[a,z] \not\subset M$

故に $a \in C(M)$ と矛盾する。

(ii) $x \in M^\circ$ の場合

$\exists \varepsilon>0$: $U(x;\varepsilon) \subset M'$. 一方 $0 < \forall\delta < \varepsilon \cdot \dfrac{dis(a,r)}{dis(a,x)}$.

$\forall u \in \overline{U}(r:\delta) \cap M$, $[a, u] \not\subset M$　（∵ $\overline{U}(x:\varepsilon)$ に通る）

∴ $a \in C(M)$ と矛盾

十分なることの証

$a \in M - C(M)$ なる a をとると，$\exists x \in M$: $[a, x] \not\subset M$　従って

$\exists y \in M' \cap (a, x)$　　∴ $\exists t \in M^* \cap (y, x)$

一方 Mの有界性により $\exists z \in M' \cap (a, \overleftarrow{x})$　　∴ $\exists s \in M^* \cap (x, z]$

$[a, s] \ni x \in M^*$　　∴ $[a, s] \in \mathfrak{z}(M^*)$

注意：有界でない星領域では必ずしも成立たない．

例：$M = \Omega - H(\lambda)$

有界であっても *open* でない星集合では必ずしも成立しない．

例：$M = \overline{U}(x;1) \cap \bigcup_n H\left(\frac{2n\pi}{\lambda}; x\right)$

但し $\overline{U}(x;1)$ は x を中心とする単位円の内部．λ は一つの無理数，$\bigcup_n$ は すべての自然数 n についての *Summe* をさす．

C(M)の具体的な構成について調べると、次の結果を得る．勿論 有界星領域としてであるが，

定理10．Mを有界星領域とするとき

$$\Omega - C(M) = \bigcup_{\substack{r, s \in M^* \\ (r, s) < M}} [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}],$$

ここに $\bigcup$ は $r, s \in M^*$ & $(r, s) < M$ であるすべての (r, s) についての *Summe*.

証：定理8から容易に

$r, s \in M^*$; $[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M$ の点は C(M) の点でないから，

$[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M \subset M - C(M) \subset \Omega - C(M)$

又 明かに $[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \cap M' < \Omega - C(M)$　　従って $[\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] < \Omega - C(M)$

∴　$\bigcup [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] < \Omega - C(M)$

逆に，$\forall x \in M - C(M)$;　$\exists y \in M$, & $\exists p \in M'$:　$p \in [x, y]$

従って (x, y)に含まれ、且 yに最も近い M^*の点 r がある（Mが *open* 従って yは内点だから このような $r (\neq y)$ は必ず存在する．）又 Mの有界により，$(x, \overrightarrow{y})$ に含まれ 且 yに最も近い M^* の点 $s (\neq y)$ がある．

$(r, s) < M$ なる故　$x \in [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$，$r, s \in M^*$　　$M - C(M) \subset \bigcup [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$

次に $z \in M'$ なる z についても 任意の $u \in M$をとって上と同様に

$\exists r \in [z, u] \cap M^*$、& $\exists s \in (z, \overrightarrow{u}) \cap M^*$: $(r, s) < M$ &

$z \in [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$

$$M \subset \bigcup [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}]$$

従って $\Omega - C(M) = \{M - C(M)\} \cup M' \subset \bigcup [\overleftarrow{r}\ \overrightarrow{s}]$

依って 本定理は証明せられた。

系　有界領域 M が星型である為の必要十分なる條件は

$$\Omega - \bigcup_{\substack{r, s \in M \\ (r,s) \subset M}} [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{s}] \neq \phi$$ であること。

§5. 二三の準備

星型領域を更に簡単にした場合の $C(M)^*$ の構造を考える為に その準備として 二三の事項を用意する。

(I) 単純領域 (*simple domain*)

定義　領域 D が次の條件を滿足するとき、單純領域という。

(i) $D^* = D^{o*}$　(ii) $\forall r \in D^*\ \exists \varepsilon > 0 : U(r; \varepsilon) \in \mathfrak{Z}(D) \,\&\, \mathfrak{Z}(D^o)$

D が単純領域であれば D^o も単純領域であり、$\overline{D}$ (D の *closure*) の任意の点 x の近傍 $U(x; \varepsilon) \in \mathfrak{Z}(D)$ である。ここでは単純領域の一般論は省略する。

(II) 角領域 (*angular domain*)

定義　$\bigcup_{\alpha < \theta < \beta} H(\theta; \check{x})$ を 点 x における、α から β 迄の角領域といい $A_x(\alpha, \beta)$ で表す。但し $\bigcup_{\alpha < \theta < \beta}$ は $\alpha < \theta < \beta$ なる すべての θ についての *summe*

$\bigcup_{\alpha \le \theta \le \beta} H(\theta; x)$ を点 x における、α から β 迄の閉角領域といい $A_x[\alpha, \beta]$ とする。

これらについて 次の如く規約する

(i) $A_x(\alpha, \beta) = A_x(\beta, \alpha)$,　$A_x[\alpha, \beta] = A_x[\beta, \alpha]$

(ii) $A_x(\alpha + 2n\pi,\ \beta + 2n\pi) = A_x(\alpha, \beta)$　$n = 0, \pm 1, \pm 2,$

[ ] に代えても成立つ。

(iii) $A_x[\alpha, \alpha] = H(\alpha; x)$　$A_x[0, 2\pi] = \Omega$

定義　$\alpha \leqq \beta$ とし $A_x(\alpha + 2\pi, \beta)$ を $A_x(\alpha, \beta)$ の共軛角領域といい $A_x(\widetilde{\alpha, \beta})$ で表す。同様に $A_x[\widetilde{\alpha, \beta}] = A_x[\alpha + 2\pi, \beta]$ を $A_x[\alpha, \beta]$ の共軛閉角領域という。

Lemma.1. $x, y, z \in X$. $(y \neq z)$. $y, z \in A_x[\alpha.\beta] < A_x(\alpha.\gamma)$

且 $A_x[\alpha.\beta] \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X) \to A_x[\alpha.\gamma] \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X)$

Lemma 2. $y \in H(\alpha ; x) \cap X$. $z \in H(\beta : x) \cap X$.

$A_x[\alpha.\beta] \in \mathfrak{Z}_{y.z}(X)$ なるような $y.z$ があるとき

$\forall \gamma \in (\alpha.\beta)$, $\exists u \in H(\gamma ; x) \cap X$: $A_x[\alpha.\gamma] \in \mathfrak{Z}_{y.u}(X)$

注意　$\alpha > \beta$ であれば $\alpha > \gamma > \beta$，$\alpha < \beta$ であれば $\alpha < \gamma < \beta$ なる如き γ という意味を $\gamma \in (\alpha.\beta)$ と略記した．尚 $\gamma \in (\beta.\alpha)$ とかいてもよい．

$\gamma \in [\alpha.\beta]$ は $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$，又は $\alpha \geqq \gamma \geqq \beta$ の意味である．

注意　*Lemma* 1. は [ ] をすべて ( ) で代えても成立つ．

(Ⅲ) 境界の接触線　切断線

Dを有界領域として D^* の接触線，切断線を定義する．

定義　$r \in D^*$　r を通る直線を L とする．

(1) $\exists \varepsilon > 0$: $U(r ; \varepsilon) \cap D \cap L = \phi$ であるとき L を r における D^* の外触線

(2) $\exists \varepsilon > 0$: $U(r : \varepsilon) \cap D^c \cap L = \phi$ のとき L を r における D^* の内触線

(3) 特に L が r において外触線と同時に内触線であるとき，

L を r における D^* の全触線

(4) 上述の (1)(2) 何れかであるとき．L を r における D^* の接触線という．

定義　L が r において接触線でない時，即ち

$\forall \varepsilon > 0$，$U(r ; \varepsilon) \cap D \cap L \neq \phi$ & $U(r.\varepsilon) \cap D^c \cap L \neq \phi$ で

あるとき．L を r における D^* の切断線という．

又 r における接触線が存在するとき，D^* は r において接触可能であるといい．r を接触点という．外触．内触．全触についても同様なことがいえる．

次に *example* として

Lemma.3.　X を有界領域，$\exists x \in X'$: $H(x) < X' \to x$ を含む

X^* の外触線が存在する．

$H(x) < X'$ なる $H(x)$ を一つとって $H(x) = H(0 ; x)$ とおき．

$H(\alpha ; x) \cap X \neq \phi$ なる α を一つ定めることが出来る．然るとき

$A_x[0.\alpha]$ 内で x から X^* の外触線を引くことが出来ることを示すのであるが，ここでは すじみちだけにして．具体的な証明は 定理 11 に徴えばよい．

$A_x[0, \theta] \cap X = \phi$　(但し $\theta \in [0.\alpha]$) であるような　($\alpha > 0$ ならば)

θの least upper bound（若し $\alpha<0$ なれば greatest lower bound）と $\bar{\theta}$（これの詳論は定理1.1の証に準ず）とすると，$H(\bar{\theta};x)$には X'の点があり（定理1.1の証参照），しかも $H(\bar{\theta};x)$ はXの点がない

∵ 若し $H(\bar{\theta};x)$ にXの点 y ありとすると，$\exists\varepsilon>0$ ∵ $U(y;\varepsilon)\subset X$

今 $0<\delta<\sin^{-1}\frac{\varepsilon}{dis(x,y)}$ なる δ をとると $A_x[0,\bar{\theta}-\delta]\cap X\neq\phi$

これは $\bar{\theta}$ の l.u.b.（又は g.l.b.）に矛盾する．故に $H(\bar{\theta};x)$ が外触線である．

§6. 単純星領域における C(M) と接触線の関係

以下 星領域に単純領域の條件を追加して，C(M) の構造と M^* の接触線との関連を調べるのが目的であるが，その前に，

Lemma 4. Mを単純星領域とするとき

$x\in M-C(M)$ なる為の必要十分な條件は

$\exists y\in M$: $[x,y]\cap M^\circ\neq\phi$ 　なることである．

証 C(M) の定義により $\exists z\in M$: $[x,z]\not\subset M \rightleftarrows \exists y\in M$: $[x,y]\cap M^\circ\neq\phi$

を証明すればよい．

$\exists z\in M$: $[x,z]\not\subset M$ を仮定すると，$\exists p\in(x,z)\cap M'$

然るに $M=M^*\cup M^\circ$ だから $p\in M^*$ としても差支えない．

（$p\in M^\circ$ であれば すでに問題はない）

さて $z\in M\rightarrow\exists\varepsilon>0$．$U(z;\varepsilon)<M$．一方 $0<\forall\delta<\frac{dis(x,p)}{dis(x,z)}\varepsilon$

なる δ をとると Mが simple domain なる事より $\exists q\in U(p:\delta)\cap M^\circ$

x と q とを結ぶと $(x,\vec{q})\cap U(z;\varepsilon)\neq\phi$，そこで $y\in(x,\vec{q})\cap U(z;\varepsilon)$

なる y をとると，$[x,y]$ は M°の点 q を含む．逆の証明は容易である．

Lemma 5. Mを星領域．$\forall x,y\,(\neq)\in M$ に対し．$\exists\alpha$: $-2\pi<\alpha<2\pi$

$A_x[0,\alpha]\in\mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ 　但し $\overrightarrow{[x,y]}=H(0;x)$ とする．

証 $[x,y]\subset M$ なれば $\alpha=0$ として成立するから $x\in M-C(M)$

& $[x,y]\not\subset M$ と仮定する．即ち $H(0:x)\,\bar{\in}\,\mathfrak{Z}(M)$

然し 定理4により $\exists\alpha$: $0<\alpha<2\pi$．$H(\alpha;x)\in\mathfrak{Z}(M)$

Mの connectivity より $A_x[0,2\pi]\in\mathfrak{Z}_{x,y}(M)$ となり，*Lemma* 2

より $\exists z\in H(\alpha:x)\cap M$: $A_x[0,\alpha]\in\mathfrak{Z}_{y,z}(M)$ となり $[x,z]<M$ なる

事と合せて $A_x[0,\alpha]\in\mathfrak{Z}_{x,y}(M)$

Lemma 6. M星領域; $x, y (\neq) \in M$, $[x,y] \not\subset M$ & $A_x[0,\alpha] \in \mathfrak{z}_{xy}(M)$ ならば $A_x[\widetilde{0,\alpha}] \in \mathfrak{z}_{xy}(M)$

証 若し $A_x[0,\alpha] \in \mathfrak{z}_{x,y}(M)$ なると同時に $A_x[\widetilde{0,\alpha}] \in \mathfrak{z}_{xy}(M)$ と仮定しよう. 然るとき 連続曲線 $C_1 < A_x[0,\alpha]$ $C_2 < A_x[\widetilde{0,\alpha}]$ が存在するから. $C_1 \cup C_2$ は closed curve となり しかも内部に M' の点がある. これは定理2系に矛盾。

愈々問題の本定理に入り・

定理11. Mを有界単純星領域とするとき. $x \in M - C(M)$ であれば. xを含むM''の外触線が存在して且その時の外触点をaとすれば $(x\ a)$ がM°の点を含むようにすることが出来る。

証 $x \in M - C(M) \rightarrow \exists y (\neq x) \in M : [x,y] \not\subset M$

$[\overrightarrow{x,y}] = H(0;x)$ とすると Lemma 5 により $\exists \omega : 0 < |\omega| < 2\pi$

$H(\omega;x) \in \mathfrak{z}(M)$ & $A_x[0,\omega] \in \mathfrak{z}_{x,y}(M)$ ∴ Lemma 6 により

$A_x[\widetilde{0,\omega}] = A_x[0, \omega \pm 2\pi] \overline{\in} \mathfrak{z}_{x,y}(M)$

注意 $\omega \pm 2\pi$ の符号の意味は次の通りである。

$\omega > 0$のときは$-$, $\omega < 0$ のときは$+$をとる. 以下煩雑を避ける為に $\omega < 0$ 従って $0 < \omega + 2\pi$ の場合のみを論ずる.

$\omega > 0$のときも証明のすぢみちは変らない。

(i) $0 \leqq \theta \leqq \omega + 2\pi$ において $\exists z \in H(\theta;x) \cap M : A_x[0,\theta] \in \mathfrak{z}_{yz}(M)$ であるような θの l.u.b が存在する. それをγとする.

(Lemma 3 の証明の中にも同じことが出て来た. その時は詳述を省いたが. ここで少し説明を加えておく. 前のLemma 3の中も同様の証明で出来る)

$0 \leqq \theta \leqq \omega + 2\pi$ のθを次の$\mathfrak{A}$と$\mathfrak{B}$ とに分類する.

$\mathfrak{A}$: $\exists z \in H(\theta;x) \cap M : A_x[0:\theta] \in \mathfrak{z}_{y,z}(M)$ なるθの類.

$\mathfrak{B}$: $\forall z \in H(\theta;x) \cap M : A_z[0.\theta] \overline{\in} \mathfrak{z}_{yz}(M)$ なるθの類

(イ) $0 \in \mathfrak{A}$, $\omega + 2\pi \in \mathfrak{B}$ だから $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 共に空でない.

(ロ) Lemma 1,2 により $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$, $\forall \beta \in \mathfrak{B} \rightarrow \alpha < \beta$

Schnitt により $[\mathfrak{A} | \mathfrak{B}] = \gamma$ を定める

(ii) $H(\gamma;x)$ には少くとも一つMの Haufungspunkt がある.

(Lemma 3 の証明も これと同様である)

$0 \leqq \varepsilon \leqq \Upsilon$ なる ε を任意にとると、$H(\Upsilon-\frac{\varepsilon}{2^n};\check{x})$ $(n=1,2,\cdots)$ には各 n に対して一つづつ次のような a_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ をとることが出来る。

$$a_n \in H(\Upsilon-\frac{\varepsilon}{2^n}:\check{x}) \cap M, \quad \& \quad A_x[0,\Upsilon-\frac{\varepsilon}{2^n}] \in \mathfrak{Z}_{y,a_n}(M)$$

注意：$\frac{\varepsilon}{2^n}$ の形は essential なものではない。$n\to\infty$ と共に $\to 0$ になりさえすればよい。

a_n のすべての集合 $\{a_n\}$ は有界である（∵ M が有界）から少くとも一つ Häufungspunkt がある。この一つを a とすれば、$a \in H(\Upsilon:\check{x})$ なることは明かである

(iii) $\exists\delta>0$: $H(\Upsilon;x) \cap \mathfrak{U}(a;\delta)$ には M の(内)点がない。

a が外点でないことは明かであるから、境界点であることを証明する為には、a が M の点でないことを証明せねばならぬが、更に進めて $\mathfrak{U}(a;\delta) \cap H(\Upsilon;x)$ には M の点がないような近傍 $\mathfrak{U}(a;\delta)$ の存在を証明すれば十分である。

さて M は simple domain であるから、

$$\forall m \in \overline{M}, \quad \exists\delta>0 : \mathfrak{U}(m;\delta) \in \mathfrak{Z}(M) \quad (\overline{M} \text{ は closure})$$

今 $a \in \overline{M} \to \exists\delta>0$: $\mathfrak{U}(a;\delta) \in \mathfrak{Z}(M)$ なる δ を定めるとき $\mathfrak{U}(a;\delta) \cap H(\Upsilon;x)$ には M の点がない事が言える。

∵ 若し $\exists b \in \mathfrak{U}(a;\delta) \cap H(\Upsilon;x) \cap M$ とすると、

$0 < \exists\eta < \delta - dis(a,b)$: $\mathfrak{U}(b:\eta) < M$ だから

$u \in A_x(\delta,\omega+2\pi) \cap \mathfrak{U}(b:\eta) \cap M$ なる u を一つとっておく。

又一方 $\mathfrak{U}(a:\delta)$ 内にある前述の $\{a_n\}$ の内の一つを a_k とすると、$\mathfrak{U}(a;\delta) \in \mathfrak{Z}_{a_k,u}(M)$ 又明に $A_x[0,\Upsilon] \in \mathfrak{Z}_{y,a_k}(M)$ である故、今 $u \in H(\Upsilon+\zeta;x)$、$0<\zeta<\omega+2\pi-\Upsilon$ とすると、$A_x[0,\Upsilon+\zeta] \in \mathfrak{Z}_{y,u}(M)$ となる。これは Υ が l.u.b. なる事に矛盾する。

以上で $H(\Upsilon;x)$ が a における M^* の外融線であることの証明が完了したが (x,a) に M^0 の点がある事を証せねばならぬ。

(iv) (x,a) に M^0 の点があること。

$H(\Upsilon;x)$ に於て x に最も近い M^* の点を b とする。勿論 $a \neq b$ で

あることが言われる.（∵ $(x, s)\cap$（sの Umgebung）にMの点がある）

(s, a) に M° の点があることを示そう

若し $[s.a]\subset\overline{M}$ と仮定する. $[s,a]$ のすべての点 v に $U(v;\varepsilon_v)$, $0<\varepsilon_v<dis(x.v)\sin\gamma$ を対応させると. $[s.a]$ が有界 closed により $\{U(v;\varepsilon_v)\}$ の中の有限個で $[s,a]\subset\bigcup_{i=1}^{\nu}U(v_i;\varepsilon_{v_i})$, 但し $s\in U(v_1;\varepsilon_{v_1})$, $a\in U(v_\nu;\varepsilon_{v_\nu})$

今 $p_i\in U(v_i;\varepsilon_{v_i})\cap U(v_{i+1};\varepsilon_{v_{i+1}})\cap M$, $i=1,2,\cdots\nu-1$

$p_\nu\in U(v_\nu;\varepsilon_{v_\nu})\cap\{a_n\}$, $p_0\in U(v_1;\varepsilon_{v_1})\cap(x,s)$

なる $p_0, p_1, \cdots\cdots, p_\nu$ をとると. Mが simple domain なる故. $U(v_i;\varepsilon_{v_i})\in\mathfrak{z}_{p_{i-1},p_i}(M)$. $(i=1,2,\cdots\cdots\nu)$.

又 $A_x[0.\gamma]\in\mathfrak{z}_{y.p_\nu}(M)$ 及び $[x.p_0]\subset M$.

従って $A_x\widetilde{[0.\omega]}\in\mathfrak{z}_{x.y}(M)$.

$\left(\bigcup_{i=1}^{\nu}U(v_i:\varepsilon_{v_i})\subset A_x(0,\omega+2\pi)\right.$ だから p_ν と x が $A_x(0,\omega+2\pi)$ 内で結ばれる）. 此は Lemma 6 に矛盾する.

(x,a) には必ず M° の点がある. これで本定理の証明は完了するが.

逆として

定理12. Mを有界星型. 単純領域とするとき. $x(\in M)$ を含んで $(x.a)\cap M^\circ\neq\phi$ なるような M^* の外融線. $[\overrightarrow{x,a}]$ が存在するならば, $x\overline{\in}C(M)$

但し a は外融点

証 $p\in(x.a)\cap M^\circ\rightarrow\exists\eta>0:U(p:\eta)\subset M^\circ$

$0<\varepsilon<\dfrac{dis(x.a)}{dis(x.p)}\eta$ なるように ε をとると $\exists y\in U(a;\varepsilon)\cap M$ として $[x.y]\cap U(p:\eta)\neq\phi$ $\therefore[x.y]\not\subset M$ $\therefore x\overline{\in}C(M)$

定理13. Mを有界単純星領域とし. $x\in M-C(M)$ なれば x を含む M^* の内融線が存在し. 且 内融点を a とすると, $(\overrightarrow{x,a})$ が Mの点を含むようにする事が出来る.

証 Lemma 4により $\exists y\in M:[x.y]\cap M^\circ\neq\phi$, $[\overrightarrow{x.y}]=H(v:x)$ とする. 又 定理4. により $\exists\omega:H(\omega:x)\in\mathfrak{z}(M)$ (便宜上 $\omega>0$ とする) Lemma 5 より $A_x[0.\omega]\in\mathfrak{z}_{x.y}(M)$.

この $x.y$ を結ぶ屈折線を $C(\subset M)$ とし. $C\vee[x.y]$（閉屈折線）の

内部にあるM°の部分集合をNとすれば、Nは有限であり、$H(\omega;x)\subset N'$
故に *Lemma* 3 により、xを含むNの外触線が存在し、これがそのまゝ、Mの内触線になることが言われる。
$(x,\vec{\alpha})$ がMの点を含むことも、定11.の証明の(iv)と同様の方法で証明されるが、ここでは省略する。

定理14. M有限単純星領域 $x(\in M)$を含み、$(x,\vec{x})\cap M \neq \phi$ なるような M^* の内触線が存在するならば $x\in C(M)$.
但し Cは内触点.
(証) 定理12と同じ方法で証明される。

定理15. $x\in C(M)^i$ ($C(M)$の内点の集合)ならば xを含む M^* の接触線は存在しない。但し Mは有限、単純星領域.

証 (i) $\forall x\in C(M)^i,\ \forall r\in M^* \to [x,r]\subset M$ を証明する.
若し $[x,r]$ に M' の点 p がありとせよ.
$$x\in C(M)^i \to \exists\delta>0 : \bar{U}(x;\delta)\subset C(M)$$
一方 $0<\varepsilon<\frac{dis(p,r)}{dis(x,r)}\delta$ なる ε を一つとると.
$\bar{U}(p;\varepsilon)\cap M^\circ\neq\phi$ (∵ Mの単純性より $M'=M^*\cup M^\circ=M^{\circ *}\cup M^\circ$ 故に $p\in M^{\circ *}\cup M^\circ$ だから.)
$q\in\bar{U}(p;\varepsilon)\cap M^\circ$ とすれば $(r,\vec{q})\cap\bar{U}(x,\delta)\neq\phi$ これの含む点を S とすれば $S\in C(M)$ 即ち $q\in(S,r)$
然るに $q\in M^\circ$ だから (S,q)にM^*の点がある。これは定理9.に反する.

(ii) $(x,\vec{r})\subset M^\circ$ を証明する
若し $(x,\vec{r})$ に $\bar{M}$の点k があるとすると、$0<\varepsilon<\frac{dis(k,r)}{dis(x,r)}\delta$
$\bar{U}(k;\varepsilon)$ に M の点 f をとれば、Mの有限性より $(r,\vec{f})$ に M^* の点があり、又 $(f,\vec{r})\cap\bar{U}(x;\delta)\neq\phi$ となり、(i)の結論と同様になる。

定理16. M 有限星領域とすると、M'の任意の点を含む、M^* の外触線が存在する。

証 *Lemma* 3.(定理11の証明方法に倣って証明される)と定理2.により明かである。

定理11より定理16迄を綜合すると 次の事がいはれる。

定理17. $r \in M^*$. rを外触点とする外触線を$L(r)$　$T = \bigcup L(r)$

（$\bigcup$は外触可能な$r \in M^*$すべてに亘る）

とすれば．$\Omega - T \subset C(M)$；　$C(M)^i \subset \Omega - T$

定理17.は"外触"を単に"接触"で置換えても成立する．勿論 定理17.のMは 有界閉凸星領域である。

当然 結論されることであるが $C(M) - C(M)^i$ の点を通って M^*の接触線が引けるかどうかは一概に言えない。しかし．若し $C(M) - C(M)^i$ の点xから接触線が引ける場合は．全触線が引かれて (x, r)に外点がない．且$(x, \vec{r})$に内点がないように出来る．（rは 全触点である）

例えば Mを．到る処 *glatt* な *closed curve* に包囲された星領域とすれば．Tはすべての切線におおわれる部分である．但し．交曲点における切線を除く。

附記． 以上つまらぬ事が冗長に過ぎた事を御詫びします．

参考文献　*Hausdorff*　*Mengenlehre*

辻正次　集合論